CONCOURS 1988 **OPTIONS M et P'**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée : 4 heures

La précision des raisonnements et la qualité de la présentation seront des éléments importants dans l'appréciation des copies.

La partie III est indépendante des parties I et II.

Notations

Si (x_n) est une suite réelle on désignera par $\prod_{k=0}^{+\infty} x_k$ la limite, lorsqu'elle existe, de $\left(\prod_{k=0}^{n} x_k\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

On notera : ln x le logarithme népérien de x

et : exp la fonction $x \longmapsto e^x$ de R vers R.

On rappelle que : $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$

et : $0! = 1$.

Dans tout le problème u_n désigne, pour $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

Lorsque la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge on note $S(x)$ sa somme.

I

1. Quel est l'ensemble de définition de S ? On notera D cet ensemble. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

2. Calculer, pour $x \in D$, $S(x+1) - S(x)$.

3. Dans les parties I et IV la fonction T sera définie sur D par : $T(x) = \exp[S(x)]$.

   a. Montrer que T vérifie les propriétés suivantes :

   (i) $T(0) = 1$

   (ii) $\forall x \in D \quad T(x+1) = (x+1)\,T(x)$.

   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad T(n) = n!$

4. Montrer que : $\forall x \in D \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad T(x+n) = T(x) \prod_{k=1}^{n} (x+k)$.

5. *a.* Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{k+n}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1).$$

   b. On pose :

$$R_n(x) = S(x+n) - S(n) - x \ln(n+1).$$

   Montrer que $R_n(x)$ est le reste d'ordre n d'une série convergente (utiliser 5.*a*).

   En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

   c. En déduire l'existence d'une fonction φ_n de D dans R telle que :

   (iii) $\forall x \in D \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad T(x+n) = n!\,(n+1)^x\,\varphi_n(x)$

   avec $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = 1$ pour tout x de D.

6. *a.* Montrer que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]$ converge.

   On notera γ sa somme.

   b. Montrer que : $\forall x \in D \quad \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{1-x}\,(k+1)^x}{x+k} = e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \frac{x}{k}}$.

   c. En déduire que : $\forall x \in D \quad T(x) = e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \frac{x}{k}}$.

II

On désigne, *dans cette partie*, par T une fonction continue dont l'ensemble de définition est D et vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii) de la partie I.

Le but de cette partie est de montrer que : $\forall x \in D \quad T(x) = \exp[S(x)]$.

1. Montrer que : $\forall x \in D \quad T(x+n) = (x+1)(x+2)\ldots(x+n)\,T(x)$.

Tournez la page S. V. P.

2. En déduire que : T et φ_n sont strictement positives sur D et que :

$$\forall x \in D \qquad \ln T(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right] + r_n(x)$$

avec : $\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0$ pour tout x de D.

3. En déduire que : $\forall x \in D \quad T(x) = \exp[S(x)]$.

4. Quel résultat obtient-on en remplaçant dans l'hypothèse initiale de la partie II : « T une fonction continue », par : « T une fonction strictement positive »?

III

Dans cette partie, on prend $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit $\Psi_{n,x}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\Psi_{n,x}(t) = \begin{cases} t^x e^{-t} & \text{si } t > n \\ t^x \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] & \text{si } t \in [0, n]. \end{cases}$$

1. Étudier le signe de $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ sur $[0, n]$ et en déduire le signe de $\Psi_{n,x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \Psi_{n,x}(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

2. On prend dans cette question $x = 0$ et $n > 1$.

   a. On pose : $g_n(t) = (n-1) \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) + t$.

   Étudier le signe de g_n sur $[0, n]$.

   b. Montrer que : $\exists!\, a_n \in]1, n[\quad : \quad \Psi'_{n,0}(a_n) = 0$.

   c. Donner un équivalent de $g_n(3)$ au voisinage de $+\infty$ et montrer que :

   $$\exists N \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \forall n \geqslant N \quad 1 < a_n < 3.$$

   d. Étudier la convergence uniforme de la suite $(\Psi_{n,0})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. Étudier, à l'aide de III.1, le signe de $\Psi'_{n,x}$ sur $[0, x]$ pour $x < n$.

4. On prend dans cette question $x \geqslant 1$ et $n > x$ et on pose pour $t \in]x, n[$:

$$h_n(t) = \ln\left[t - x + \frac{tx}{n}\right] - \ln(t - x) + g_n(t).$$

   a. Pour $t \in]x, n[$ calculer $h'_n(t)$ et montrer que :

   $\exists!\, b_n \in]x, n[\quad : \quad h_n(b_n) = 0$.

   b. En déduire le signe de $\Psi'_{n,x}$ sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{n\}$.

   c. Donner le tableau de variation de $\Psi_{n,x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que :

   $$\exists K \in \mathbb{N} \quad : \quad \Psi_{n,x}(b_n) \leqslant K \frac{b_n^{x+2}}{n(b_n - x)}.$$

   d. Donner un équivalent simple de $h_n(x+1)$ et de $h_n(x+3)$ quand n tend vers $+\infty$.

   e. En déduire que la suite $(\Psi_{n,x})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

5. On prend dans cette question : $0 < x < 1$.

   a. Comparer, pour $t \in [0, 1]$, $\Psi_{n,x}(t)$ et $\Psi_{n,0}(t)$.

   b. Comparer, pour $t \in [1, +\infty[$, $\Psi_{n,x}(t)$ et $\Psi_{n,1}(t)$.

   c. En déduire la convergence uniforme de $(\Psi_{n,x})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.

IV

Les notations sont celles des parties I et III. En particulier :

$$x \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \Psi_{n,x}(t)\, dt$.

2. *a.* Calculer : $\int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ et exprimer le résultat sous la forme :

   $D_n(x) \prod_{k=1}^{n+1} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \frac{x}{k}}$ où D_n est une fonction à préciser.

   b. Quelle est la limite de $D_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$?
   (On pourra utiliser I.5.*a* et I.6.*a*.)

   c. En déduire : $\lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

   Exprimer le résultat à l'aide de la fonction T de la partie I.

3. Montrer que : $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \Psi_{n,x}(t)\, dt = 0$.

4. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad T(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail